


Elements de correction des exercices : Fonction exponentielle

I Calculs algébriques

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | | |
|---------------------|----------------------|-------------------------|------------------|
| 1. $\exp(3)\exp(5)$ | 2. $\exp(-2)\exp(4)$ | 3. $\frac{1}{\exp(-5)}$ | 4. $(\exp(5))^3$ |
|---------------------|----------------------|-------------------------|------------------|

Correction

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 1. $\exp(8)$ | 2. $\exp(2)$ | 3. $\exp(5)$ | 4. $\exp(15)$ |
|--------------|--------------|--------------|---------------|

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|-----------------|--------------------------------|--|
| 1. $e^3 e^4$ | 3. $\frac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}}$ | 5. $(e^3)^{-2} e^5$ |
| 2. $e^4 e^{-4}$ | 4. $(e^4)^3 e^4$ | 6. $\frac{e - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}$ |

Correction

- | | | |
|----------|-------------|---------------|
| 1. e^7 | 3. e^4 | 5. e^{-1} |
| 2. 1 | 4. e^{16} | 6. \sqrt{e} |

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | | |
|-------------------|-----------------|-----------------------------|----------------------------------|
| 1. $e^x e^{-x}$ | 3. ee^{-x} | 5. $e^x(e^x + e^{-x})$ | 7. $\sqrt{e^{-2x}}$ |
| 2. $e^x e^{-x+1}$ | 4. $(e^{-x})^2$ | 6. $\frac{(e^x)^3}{e^{2x}}$ | 8. $\frac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$ |

Correction

- | | | | |
|--------|--------------|-----------------|----------------|
| 1. 1 | 3. e^{1-x} | 5. $e^{2x} + 1$ | 7. e^{-x} |
| 2. e | 4. e^{-2x} | 6. e^x | 8. e^{-2x+1} |

Exercice 4. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|
| 1. $(e^5 - e^4)^2 - (e^5 + e^4)^2$ | 3. $\sqrt{(e^2 + 1)^2 - (e^2 - 1)^2}$ | 5. $(e^{5x})^2$ |
| 2. $(e^2 + e^{-2})(e^2 - e^{-2})$ | 4. $e^{2x+1} \times e$ | 6. $e^{9x} - 2(e^{3x})^3$ |



Correction

1. $-4e^9$

3. $2e$

5. e^{10x}

2. $e^4 - e^{-4}$

4. $e^{2(x+1)}$

6. $-e^{9x}$

II Équations - Inéquations

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $\exp(x) = e$

4. $e^{x^2+x} = 1$

7. $e^x + e^{-x} = 0$

2. $\exp(-x) = 1$

5. $e^x - e^{-x} = 0$

8. $e^{3x+1} = e^{-2x+3}$

3. $\exp(2x-1) = e$

6. $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2$

9. $e^{2x} - 1 = 0$

Correction

1. $\{1\}$

4. $\{-1; 0\}$

7. \emptyset

2. $\{0\}$

5. $\{0\}$

8. $\{2/5\}$

3. $\{1\}$

6. $\{1\}$

9. $\{0\}$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $\exp(x) < e$

4. $e^x < 1$

7. $e^x - e^{-x} > 0$

2. $\exp(-x) \geq 1$

5. $e^{-x} > 0$

8. $e^{2x} - 1 \geq 0$

3. $e^{2x-1} > e^x$

6. $e^{-x} > 1$

9. $xe^{-x} - 3e^{-x} < 0$

Correction

1. $] -\infty ; e[$

4. $] -\infty ; 0[$

7. $] 0 ; +\infty[$

2. $] -\infty ; 0]$

5. \mathbb{R}

8. $[0 ; +\infty[$

3. $] 1 ; +\infty[$

6. $] -\infty ; 0[$

9. $] -\infty ; 3[$



Exercice 7. 1. Déterminer les racines du polynôme : $P(X) = X^2 + 4X - 5$.

2. En déduire les solutions de l'équation $e^{2x} + 4e^x = 5$.

3. Résoudre les équations suivantes :

(a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

(b) $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$

(c) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

Correction

1. Deux racines : -5 et 1 .

2. $e^{2x} + 4e^x = 5 \Leftrightarrow (e^x + 5)(e^x - 1) = 0$.

Seule le second facteur peut être nul. $\mathcal{S} = \{0\}$.

3. (a) $e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x + 2)(e^x - 1)$. Cette équation n'a qu'une solution : 0 .

(b) Équation équivalente (on divise par e).

(c) Équation équivalente (on multiplie par e^x).

Exercice 8. Résoudre sur \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$

2. $-e^{2x} - e^x + 2 > 0$

3. $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$

4. $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

Correction

1. $]0 ; +\infty[$

2. $] -\infty ; 0[$

3. $[0 ; +\infty[$

4. $] -\infty ; 0[$

Exercice 9. Résoudre dans \mathbb{R} .

1. $e^{x^2+2} = \frac{e^{2x}}{e}$

2. $2e^{2x} + 5e^x + 3 = 0$

3. $e^x + e^{-x} > \sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}$

4. $e^{x^2} + 1 \leq 2$

Correction

1. $\{1\}$

2. \emptyset

3. $\left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$

4. $\{0\}$



III Dérivées

Exercice 10. Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = e^{-x}$

2. $f(x) = \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}$

3. $f(x) = e^{x^2+x}$

4. $f(x) = x e^{x+1}$

5. $f(x) = e^{x^2+1}$

6. $f(x) = (x^2 + 1) e^{3x+1}$

7. $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x}$

8. $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$

Correction

1. $f'(x) = -e^{-x}$

2. $f'(x) = \frac{x+2}{4} e^{\frac{x}{2}}$

3. $f'(x) = (2x+1) e^{x^2+x}$

4. $f'(x) = (x+1) e^{x+1}$

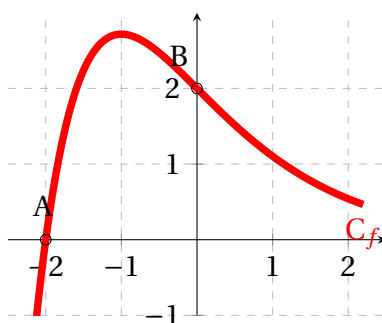
5. $f'(x) = 2x e^{x^2+1}$

6. $f'(x) = (3x^2 + 2x + 3) e^{3x+1}$

7. $f'(x) = \frac{3 - e^{2x}}{e^{3x}}$

8. $f'(x) = \frac{2(e^{-2x} - e^{2x} + 2)}{(1 + e^{2x})^2}$

Exercice 11. Une courbe \mathcal{C} qui passe par les points A(-2 ; 0) et B(0 ; 2) représente une fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des réels.



- À l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
- En déduire le tableau de variation de f .

Correction

1. $f(0) = 2$ donc $b = 2$ et $f(-2) = 0$ donc $a = 1$.

2. $f(x) = (x+2)e^{-x}$ donc $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	e	0